Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care verifică simultan egalităţile $x^2y^2+1 = x^2+xy$, $y^2z^2+1 = y^2+yz$ şi $z^2x^2+1 = z^2+xz$.

Soluţie Deoarece $x^2y^2 + 1 \geq 2xy$, rezultă $x^2 \geq xy$ şi analog $y^2 \geq yz$, $z^2 \geq zx$. . . . . **3 puncte**

Dacă unul dintre numere, spre exemplu x, ar fi egal cu 0, înlociund în prima relaţia am avea $1 = 0$, fals, deci x, y, z sunt nenule. . . . . **1 punct**

Atunci $x \geq y \geq z \geq x$, deci $x = y = z$. . . . . **2 puncte**

Obţinem $x^4 + 1 = 2x^2$, de unde $x = 1$ şi apoi $x = y = z = 1$. . . . **1 punct**

Problema 2. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că

$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|.$$

Să se arate că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Soluţie. Fie k valoarea comună a modulelor. Atunci $a - b = \pm k$, $b - c = \pm\frac{1}{2}k$, $c - d = \pm\frac{1}{3}k$, $d - e = \pm\frac{1}{4}k$ şi $e - a = \pm\frac{1}{5}k$ (pentru anumite alegeri a semnelor $+$ şi $-$). . . . . **3 puncte**

Dacă $k = 0$, problema este rezolvată. . . . . **1 punct**

Pentru $k \neq 0$, prin adunarea relaţiilor obţinem $0 = (\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5})k$, deci $\frac{1}{5} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}$, pentru o alegere a semnelor. . . . . **1 punct**

Pentru orice alegere a semnelor, ultima egalitate revine la $\frac{1}{5} = \frac{m}{12}$, cu m întreg, deci 5 divide 12, contradicţie. . . . . **2 puncte**

Problema 3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Fie F piciorul perpendicularei din B pe dreapta MC. Să se determine măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF).

Soluţie. Planele (BFD) şi (ABF) se taie după dreapta BF. Muchiile AB şi DC sunt perpendiculare pe planul (BCC'), deci şi pe dreapta BF. **1 punct**

Dreapta BF este perpendiculară pe DC şi pe FC - din ipoteză - deci pe planul (DFC) şi implicit pe DF. . . . . **2 puncte**

Avem $AB \subset (ABF)$, $AB \perp BF$ şi $DF \subset (DBF)$, $DF \perp BF$, deci măsura unghiului dintre planele (BFD) şi (ABF) este măsura unghiului dintre dreptele AB şi DF, adică $\angle FDC$, deoarece $AB \parallel DC$. . . . . **2 puncte**

Obţinem din relaţia lui Pitagora că $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. . . . . **1 punct**

În triunghiul dreptunghic FDC avem $\mathrm{tg}\angle FDC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci măsura unghiului dintre cele două plane este de $30°$. . . . . **1 punct**

Problema 4. Numerele naturale a şi b verifică relaţia

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \tag{1}$$

a) Să se arate că $|a - 3b| \geq 1$.

b) Să se determine toate perechile de numere naturale (a, b) care satisfac relaţia (1).

Soluţie. a) Dacă prin absurd $|a - 3b| < 1$, din $|a - 3b| \in \mathbb{N}$ obţinem $|a - 3b| = 0$. . . . . **1 punct**

Atunci $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = -33b \neq 16$. . . . . **1 punct**

b) Deoarece $(a-3b)^2 \geq 1$, avem $16+33b = (a^2-9b^2)^2 = (a+3b)^2(a-3b)^2 \geq (a + 3b)^2 \geq 9b^2$. . . . . **1 punct**

De aici rezultă că $b \leq 4$, deoarece $b \geq 5$ implică $9b^2 \geq 45b = 33b + 12b > 33b + 16$. . . . . **1 punct**

Atunci b este 0, 1, 2, 3 sau 4 şi deci $33b + 16$ =16, 49, 82, 115 sau 148, respectiv. . . . . **1 punct**

Cum $33b + 16$ este pătrat perfect, ... **1 punct**

rămân doar soluţiile $b = 0$ şi $a = 2$ sau $b = 1$ şi $a = 4$; în alte cuvinte, vom obţine perechile $(a, b) = (2, 0)$, respectiv $(4, 1)$. . . . . **1 punct**